Varianta 056

Subiectul I:

a) BC=$\sqrt{2}$. b) S_{ABC}=2. c) $G\left(\frac{2}{3},0\right)$. d) $\cos\hat{A}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$. e) $m_{AB}=-1$. f) $A,B,C\in I$.

Subiectul II:

1. a) f(-1)=$(1-1)^9$=0. b) $C_9^0-C_9^1+C_9^2-\ldots-C_9^9=f(-1)=0$,.

c) $f(\sqrt{2})=(1+\sqrt{2})^9$. $T_{k+1}=C_9^k\cdot\sqrt{2}^k\in\mathbf{Q}\Leftrightarrow$ k∈ {0, 2, 4, 6, 8}. Deci numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $f(\sqrt{2})$ este 5 iar numărul termenilor iraționali este 5.

d) $T_3=C_9^2\cdot\sqrt{2}^2=\frac{9!}{2!\,7!}\cdot 2=36\cdot 2=72$. e) In $\mathbf{Z}_7$ avem $\hat{5}^7=\hat{5}$.

2. a) f'(x)=$\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ .b) f(-x)=$\frac{-x}{(-x)^2+1}=-\frac{x}{x^2+1}=-f(x),\forall$ x∈ **R**

c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-\frac{2}{5}}{x-2}=-\frac{3}{25}$ d) $\int\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c$. avem F(0)=1$\Rightarrow\frac{1}{2}+c=1\Leftrightarrow c=\frac{1}{2}$.

deci F(x)=$\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\Rightarrow F(1)=\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}$ .e) $\int_{-2}^{2}f(x)dx=0$, deoarece f este funcție impară, iar [-2,2] este simetric față de origine.

Subiectul III:

a) det A=$2\cdot\begin{vmatrix}1&2&3\\1&2&3\\3&6&9\end{vmatrix}=0$. Deoarece liniile sunt două câte două proportionale, toti determinantii de ordinul doi sunt nuli. Deci rang A=1.

b)$A^2=14\cdot A$ $\Rightarrow$a=14

c) Avem $A^2=14\cdot A\Rightarrow A^3=14\cdot A\cdot A=14\cdot A^2=14^2\cdot A$

Fie p(n): $A^n=14^{n-1}\cdot A$, n ∈ $\cdot^*$.

Prin inductie, $A^n=14^{n-1}\cdot A$, n$\geq$1

d) Fie C=$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\in M_{3,1}(\mathbf{R})$ si L=(1 2 3) ∈ $M_{1,3}(\mathbf{R})\Rightarrow C\cdot L=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\cdot(1\,2\,3)=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}=A$

e)I_3+A=$\begin{pmatrix}2&2&3\\2&5&6\\3&6&10\end{pmatrix}\Rightarrow\det(I_3+A)=15$ $\Rightarrow$matricea I_3+A este inversabila, $(I_3+A)^{-1}=\frac{1}{\det(I_3+A)}\cdot(I_3+A)^*$. Pe de altă parte $(I_3+A)^{-1}\cdot(I_3+A)=I_3$. Deci din

$(I_3+A)^{-1}=bI_3+cA$ prin inmulțire la dreapta în I_3+A obtinem relatia: $I_3=(bI_3+cA)(I_3+A) \Leftrightarrow I_3=bI_3+bA+cA+cA^2 \Leftrightarrow A^2=14\cdot A \Leftrightarrow I_3=bI_3+bA+cA+14cA \Leftrightarrow I_3=bI_3+(b+15c)A$

$$\Rightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=-\dfrac{1}{15} \end{cases}.$$

f) Având in vedere faptul că $(xI_3)\cdot(yJ)=(yJ)\cdot(xI_3)$ putem folosi pentru a calcula $(xI_3+yJ)^n$ formula lui Newton:

$$\Rightarrow (xI_3+yJ)^n = C_n^0 x^n I_3 + C_n^1 x^{n-1} yJ + C_n^2 x^{n-2} y^2 J^2 + \ldots + C_n^n y^n J^n =$$

$$= x^n I_3 + \frac{1}{3}\left(C_n^1 x^{n-1} 3y + C_n^2 x^{n-2} 3^2 y^2 + \ldots + C_n^n 3^n y^n\right) J =$$

$$= x^n I_3 + \frac{1}{3}\left[\left(C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} 3y + C_n^2 x^{n-2} 3^2 y^2 + \ldots + C_n^n 3^n y^n\right) - x^n\right]\cdot J =$$

$$= x^n I_3 + \frac{1}{3}\left[(x+3y) - x^n\right]\cdot J \text{ (am folosit relatia } J^n = 3^{n-1} J \text{)}$$

g) cautam inversa de forma

$(xI_3+yJ)^{-1} = x' I_3 + y' J$. Din $(xI_3+yJ)\cdot(x' I_3 + y' J) = I_3$ rezulta sistemul $x\cdot x' = 1,\ x\cdot y' + x'\cdot y = 0$ care pentru $x \neq 0$ si $x+3y \neq 0$ are solutia $x' = \dfrac{1}{x}$ si $y' = \dfrac{-y}{x(x+3y)}$

Subiectul IV:

a) $a_{n+1}-a_n = \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha}} > 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*$ $\Rightarrow (a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ este strict crescator

b) $f:[1,+\infty] \to \mathbf{R}$, $f(x)=\dfrac{1}{x^{\alpha}}, \alpha > 0$,este derivabila. $f'(x) = -\alpha \cdot x^{-\alpha-1} = -\alpha\cdot\dfrac{1}{x^{\alpha+1}} < 0 \Rightarrow$ f este strict descrescatoare

c) Functia f fiind descrescatoare, pentru $\forall\, x \in [k,k+1]$ avem $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$. f este continuă, deci integrabila, rezultă: $\displaystyle\int_k^{k+1} f(k+1)dx \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \int_k^{k+1} f(k)dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k),\ \forall\, k \in \mathbf{N}^*$$

d) Adunand inegalitățile de la punctul c) pentru k=2, …,n-1 rezultă:

$$\frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{n^{\alpha}} \leq \int_1^n f(x)dx \leq 1 + \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^{\alpha}} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow a_n - 1 \leq b_n \leq a_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $n \geq 2$.

e) Pt $\alpha > 1$ $b_n = \displaystyle\int_1^n f(x)dx = \int_1^n \frac{1}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}\cdot x^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}$. $b_n = \dfrac{1}{(1-\alpha)\cdot n^{\alpha-1}} - \dfrac{1}{1-\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Pentru $\alpha > 1$, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} b_n = 0 - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$.

f) $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{(n+1)^{\alpha}} > 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}^*, \forall\, \alpha \in (0,+\infty) \Rightarrow (a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ strict crescător.

Dacă $\alpha > 1$ rezultă

$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}<1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=$

$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}<2\Rightarrow a_n<2, \forall n\in$ ▪*. Avem $a_n>0$, $\forall$ n$\in$ $\mathbf{N}^*$. Deci pentru $\alpha>1$, sirul ($a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ este strict crescator si marginit deci $(a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ este convergent. Dacă $\alpha \le 1$, rezultă

$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\ge 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\ln(n+1)$. $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$, deci $\lim\limits_{x\to\infty}a_n=+\infty$, sirul ($a_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ este divergent.

(avem $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \forall$ n$\in$ $\mathbf{N}^* \Leftrightarrow$ n $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right), \forall$ n$\in$ $\mathbf{N}^*$

$\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}<\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}, \forall$ n$\in$ $\mathbf{N}^* \Rightarrow k\to 1,2,\ldots,n)\Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}<$

$<\ln(n+1)< 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}$

g) Fie $x_n=a_n-b_n$, atunci $x_{n+1}-x_n=a_{n+1}-a_n-b_{n+1}+b_n=\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\int_n^{n+1}f(x)dx\le 0$, deci sirul $(x_n)_{n\in \mathbf{N}^*}$ este descrescător şi mărginit, in concluzie este convergent.